Roll No. .... Total Pages: 05

1225

B.SC. FIRST YEAR EXAMINATION, 2019

MATHEMATICS

Paper – I

ALGEBRA

Time: Three Hours

Maximum Marks: 75

PART – A (खण्ड – अ) *[Marks: 20]*

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – B (खण्ड – ब) *[Marks: 35]*

Answer five questions (250 words each).

Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.

*प्रत्येक इकाई से **एक–एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – C (खण्ड – स) *[Marks: 20]*

Answer any two questions (500 words each).

All questions carry equal marks.

*कोई **दो प्रश्न** कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 500 शब्दों से अधिक न हो।*

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – A / खण्ड– अ

Q.1 (i) If A and B are symmetric matrices, then show that (AB+BA) is also symmetric matrix.

यदि A तथा B सममित आव्यूह हों, तो सिद्ध कीजिए (AB+BA) भी सममित आव्यूह है।

(ii) Find the rank of matrix -

निम्न आव्यूह की कोटि/जाति ज्ञात कीजिए–

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(iii) Solve the following equation whose roots are in A.P. -

निम्न समीकरण हल कीजिए जिसके मूल स.श्रे. में हैं –

$$x^4 - 2x^3 - 21x^2 + 22x - 40 = 0$$

(iv) If α, β, γ are the roots of the equation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, then find the value of $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$.

यदि α, β, γ समीकरण $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ के मूल हों, तो $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$ का मान ज्ञात कीजिए।

(v) Define a cyclic group.

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।

(vi) If $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, then compute the order of $\alpha\beta$.

यदि $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, तब $\alpha\beta$ की कोटि का परिकलन कीजिए।

(vii) Define normal subgroup.

प्रसामान्य उपग्रुप को परिभाषित कीजिए।

(viii) Find all the cosets of 4z in the group (z, +).

ग्रुप (z, +) में 4z के सभी सहसमुच्चयों को ज्ञात कीजिए।

(ix) Define isomorphism.

तुल्याकारिता को परिभाषित कीजिए।

(x) Show that the mapping $f:(C,+)\to(R,+);\ f(x+iy)=x,\ \forall x+iy\in C$ is a homomorphism.

दिखाइए कि प्रतिचित्रण $f:(C,+)\to(R,+);\ f(x+iy)=x,\ \forall x+iy\in C$ एक समाकारिता है।

PART – B / खण्ड– ब

UNIT –I/ इकाई – I

Q.2 Find the eigen values and the corresponding eigen vectors of the following matrix A-

मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूलों एवं उनके संगत सदिशों को ज्ञात कीजिए –

$$A=\begin{bmatrix}8 & -6 & 2\\ -6 & 7 & -4\\ 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

Q.3 If $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, then find the product AB and using this, solve the following system of equations:

$x + y + 2z = 1$

$3x + 2y + z = 7$

$2x + y + 3z = 2$

यदि $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -5\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$ हों, तो गुणन AB ज्ञात कर इसके प्रयोग से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$x + y + 2z = 1$

$3x + 2y + z = 7$

$2x + y + 3z = 2$

UNIT –II/ इकाई – II

Q.4 The roots of the equation $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ may be is geometrical progression. Then prove that $b^3d - ac^3 = 0$.

समीकरण $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ के मूल गुणोत्तर श्रेणी में है, तब सिद्ध कीजिए कि $b^3d - ac^3 = 0$.

Q.5 Solve the equation $2x^3 – x^2 – 22x – 24 = 0$ two of the roots being in the ratio 3 : 4.

समीकरण $2x^3 – x^2 – 22x – 24 = 0$ को हल कीजिए, जबकि दो मूलों का अनुपात 3 : 4 है।

UNIT –III / इकाई – III

Q.6 If $G = \{(a,b) | a, b \in R, a \neq 0\}$ and * is the operation defined in G as follows; then show that (G, *) is a non – abelian group:

(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)

यदि $G = \{(a,b) | a, b \in R, a \neq 0\}$ तथा *, G में निम्न प्रकार परिभाषित संक्रिया हो, तो सिद्ध कीजिए कि (G, *) एक प्रति आबेली ग्रुप है –

(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)

Q.7 Every infinite cyclic group has two and only two generators.

प्रत्येक अपरिमित चक्रीय ग्रुप के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

UNIT –IV / इकाई – IV

Q.8 The set of the cosets of $H \triangleleft G$ is a group with respect to multiplication of cosets defined as follows-

$$HaHb = Hab, \ \forall a, b \in G$$

किसी ग्रुप G में उसके किसी प्रसामान्य उपग्रुप H के सभी समसमुच्चयों का समुच्चय निम्न प्रकार परिभाषित सहसमुच्चयों के गुणा के लिए एक समूह होता है–

$$HaHb = Hab, \forall a, b \in G$$

Q.9 If H is a subgroup of G and $N \triangleleft G$, then $H \cap N \triangleleft H$.

यदि H ग्रुप G का कोई एक उपग्रुप हो तथा $N \triangleleft G$ तो $H \cap N \triangleleft H$.

UNIT –V / इकाई – V

Q.10 Let $f : G \to G'$ be a morphism of groups. Let $N \triangleleft G \subset K$ the kernel of f ; then $\exists$ a unique morphism $\varphi : \frac{G}{N} \to G'$, such that $f = \varphi \circ p$.

माना $f : G \to G'$ ग्रुप समाकारिता है। माना $N \triangleleft G \subset K$ (f की अष्टि) तो एक ऐसी अद्वितीय समाकारिता $\varphi : \frac{G}{N} \to G'$ का अस्तिम्व है, कि $f = \varphi \circ p$.

Q.11 The relation of isomorphism '$\cong$' in the set of all groups is an equivalence relation.

समूहों के समुच्चय में तुल्यकारिता का सम्बन्ध '$\cong$' एक तुल्यता सम्बन्ध होता है।

PART – C / खण्ड– स

Q.12 Every square matrix A satisfies its own characteristic equation $|A - xI| = 0$ or $\varphi(A) = 0$

That is $A^n + a_1A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \ldots + a_n I = 0$

प्रत्येक वर्ग मैट्रिक्स A स्वयं के अभिलाक्षणिक समीकरण $|A - xI| = 0$ या $\varphi(A) = 0$ को संतुष्ट करता है –

अर्थात् $A^n + a_1A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \ldots + a_n I = 0$

Q.13 Solve the equation $x^3 - 18x - 35 = 0$ by Cardan's method.

समीकरण $x^3 - 18x - 35 = 0$ को कार्डन विधि से हल कीजिए।

Q.14 If the order of an element a of a group G is n, then the order of a^p is also n provided p and n are relatively prime. If every element of a group G is equal to its inverse, then prove that G is an abelian.

यदि किसी ग्रुप G में एक अवयव a की कोटि n हो, तो a^p की कोटी भी n होगी यदि p और n सापेक्षित अभाज्य है। यदि ग्रुप G का प्रत्येक अवयव स्वयं के प्रतिलोम अवयव के बराबर है, तब सिद्ध कीजिए कि G एक आबेली ग्रुप है।

Q.15 The order of every subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group.

किसी परिमित ग्रुप के प्रत्येक उपग्रुप की कोटि ग्रुप की कोटि का भाजक होती है।

Q.16 Let H and K be two normal subgroups of G, such that $H \subset K$ then prove that $\frac{K}{H} \triangleleft \frac{G}{H}$.

माना H तथा K, G के दो प्रसामान्य उपसमूह से हैं कि $H \subset K$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{K}{H} \triangleleft \frac{G}{H}$.
