Roll No. .... Total Pages: 07

2126

SECOND YEAR ARTS EXAMINATION, 2019

MATHEMATICS

Paper - I

ADVANCED CALCULUS

Time: Three Hours

Maximum Marks: 70

PART – A (खण्ड – अ) *[Marks: 20]*

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – B (खण्ड – ब) *[Marks: 30]*

Answer five questions (250 words each).

Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.

*प्रत्येक इकाई से **एक–एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – C (खण्ड – स) *[Marks: 20]*

Answer any two questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

*कोई **दो प्रश्न** कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।*

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

<u>PART – A / खण्ड– अ</u>

Q.1 Answer the following questions –

निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर लिखिए –

(1) Define removable discontinuity.

अपनेय असांतत्यता को परिभाषित कीजिए।

(2) What is Cauchy's definition continuity?

सांतत्यता की कोशी की परिभाषा क्या है?

(3) Define Evolute.

केन्द्रज को परिभाषित कीजिए।

(4) If, $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2$

Find- $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$

यदि, $z = x^3 + 3x^2y + 3xy^2$

ज्ञात कीजिए, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$

(5) Evaluate- $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dx\, dy$

मान ज्ञात कीजिए – $\int_0^1 \int_0^2 (x + y)\, dx\, dy$

(6) Write Dirichlet's Integral.

डिरिचलिट समाकलन लिखिए।

(7) Define Direction derivatives.

दिक् अवकलज् को परिभाषित कीजिए।

(8) Define divergence of vector point function.

सदिश बिन्दु फलन के अपसरण को परिभाषित कीजिए।

(9) Define line integral.

रेखा समाकलन को परिभाषित कीजिए।

(10) Write Green's theorem.

ग्रीन प्रमेय लिखिए।

PART – B / खण्ड– ब

UNIT –I / इकाई – I

Q.2 Examine the continuity of the function at x = 0 –

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

निम्न फलन की x = 0 पर सांतत्यता की जाँच कीजिए–

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Q.3 Prove that following function –

$$f(x) = \begin{cases} x\left[1 + \frac{1}{3}\log \sin x^2\right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

is not differentiable at x = 0.

सिद्ध कीजिए की निम्न फलन x = 0 पर अवकलनीय नहीं है।

$$f(x) = \begin{cases} x\left[1 + \frac{1}{3}\log \sin x^2\right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

UNIT –II / इकाई – II

Q.4 Prove that the envelope of the family of Parabola's -

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

is an Asteroid when $ab = c^2$, c.

सिद्ध कीजिए की परवलयों –

$$\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$$

के कुल का अन्वालोप एक एस्ट्राइड होता है जबकि $ab = c^2$, c अचर है।

Q.5 If U = f (y – z, z – x, x - y), then prove that - $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

If U = f (y – z, z – x, x - y), तो सिद्ध कीजिए कि $-\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

UNIT –III / इकाई – III

Q.6 Integrate r sinθ over the area of cardioid r = a (1 + cosθ) above the initial line.

कार्डियोइड r = a (1 + cosθ) के आरम्भिक रेखा के ऊपर वाले क्षेत्र पर r sinθ का समाकलन कीजिए।

Q.7 Find the volume of the ellipsoid in the first positive octant –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

निम्न दीर्घवृतज का प्रथम धनात्मक अष्टांष्क में आयतन ज्ञात कीजिए–

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

UNIT –IV / इकाई – IV

Q.8 If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, then the value of –

(a) $\frac{\partial\,(r,\theta)}{\partial\,(x,y)}$ (b) $\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(r,\theta)}$

यदि $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए –

(a) $\frac{\partial\,(r,\theta)}{\partial\,(x,y)}$ (b) $\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(r,\theta)}$

Q.9 If $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\hat{k}$ and $r = |\vec{r}|$, then prove that -

$$\vec{\nabla}.(r^n\,\vec{r}) = (n+3)r^n$$

यदि $\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\hat{k}$ और $r = |\vec{r}|$, तो सिद्ध कीजिए –

$$\vec{\nabla}.(r^n\,\vec{r}) = (n+3)r^n$$

UNIT –V / इकाई – V

Q.10 Evaluate –

$$\int_s \left(y^2 z^2\,\hat{\imath} + z^2 x^2\,\hat{\jmath} + z^2 y^2\,\hat{k}\right).\hat{n}\ ds$$

where s is the part of the sphere.

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ above xy plane.

मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_s \left(y^2 z^2\,\hat{\imath} + z^2 x^2\,\hat{\jmath} + z^2 y^2\,\hat{k}\right).\hat{n}\ ds$$

जहाँ s गोले $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ का वह पृष्ठ है, जो xy समतल के ऊपर है।

Q.11 Evaluate by green's theorem -

$$\int_c [(\cos x \sin y - xy)dx + \sin x \cos y \, dy]$$

where c, is circle $x^2 + y^2 = 1$.

ग्रीन प्रमेय द्वारा मान ज्ञात कीजिए –

$$\int_c [(\cos x \sin y - xy)dx + \sin x \cos y \, dy]$$

जहाँ c, वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ हैं।

PART – C / खण्ड– स

Q.12 Prove the Intermediate Value theorem.

अन्तर्वती प्रमेय सिद्ध कीजिए।

Q.13 If $U = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, then prove that -

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u.$$

यदि, $U = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, तो सिद्ध करो कि –

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2u$$

Q.14 Find the surface area of solid generated by the revolution of the Astroid $x = a \cos^3 t,\ y = a \sin^3 t$ about the x-axis.

एस्ट्राइड $x = a \cos^3 t,\ y = a \sin^3 t$ द्वारा x–अक्ष के परितः परिक्रमण से जनित धनाकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

Q.15 Prove that the divergence of curl of any vector $\vec{a}$ is zero –

$$\text{i.e, div (Curl } \vec{a}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$$

सिद्ध करो की किसी सदिश फलन $\vec{a}$ के कुन्तल का अपसरण शून्य होता है –

$$\text{i.e, div (Curl } \vec{a}) = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0$$

Q.16 Verify Stoke's theorem for the function –

$$\vec{F} = z\,\hat{i} + x\,\hat{j} + y\,\hat{k}$$

where the curve C is the circle in xy plane bounding the hemisphere.

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

स्टाक प्रमेय का फलन $\vec{F} = z\,\hat{i} + x\,\hat{j} + y\,\hat{k}$ के लिये सत्यापन कीजिए जहाँ c - एक xy समतल का इकाई वृत्त है, जो गोलार्द्ध $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ को परिबद्ध किये हुए हैं।
