

**1126**  
**I YEAR ARTS EXAMINATION, 2018**  
**MATHEMATICS**  
**Paper-I**  
**ALGEBRA**

Time: Three Hours  
Maximum Marks: 70

**PART – A (खण्ड – अ)**

[Marks: 20]

*Answer all questions (50 words each).*

*All questions carry equal marks.*

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – B (खण्ड – ब)**

[Marks: 30]

*Answer five questions (250 words each).*

*Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – C (खण्ड – स)**

[Marks: 20]

*Answer any two questions (300 words each).*

*All questions carry equal marks.*

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## PART – A / खण्ड— अ

Q.1 Answer the following-  
निम्न के उत्तर दीजिए—

### UNIT –I / इकाई – I

- (i) Define unitary of a square matrix.  
किसी वर्ग मैट्रिक्स की ऐकिक मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Nullity of a matrix.  
किसी मैट्रिक्स की शून्यता को परिभाषित कीजिए।

### UNIT –II / इकाई – II

- (iii) Define Reciprocal equation.  
व्युत्क्रम समीकरण को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Form an equation of the lowest degree with rational coefficients having  $1+i\sqrt{3}$  and  $1-i\sqrt{3}$  as two of its roots.  
परिमेय गुणांक सहित तथा न्यूनतम घात में समीकरण बनाइये जिसके मूल  $1+i\sqrt{3}$  तथा  $1-i\sqrt{3}$  है।

### UNIT –III / इकाई – III

- (v) Write definition of order of an element of a group.  
समूह में किसी अवयव की कोटि की परिभाषा लिखिये।
- (vi) Define cyclic group.  
चक्रीय समूह की परिभाषा दीजिए।

### UNIT –IV / इकाई – IV

- (vii) Define cosets.  
सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए।
- (viii) Write definition of index of a subgroup.  
उपसमूह के सूचकांक की परिभाषा लिखिये।

### UNIT –V / इकाई – V

- (ix) Write definition of kernal of homorphism.  
समाकारिता की अष्टि की परिभाषा लिखिए।
- (x) State Cayle's theorem.  
केली के प्रमेय का प्राकथन लिखिए।

## PART – B / खण्ड— ब

### UNIT –I / इकाई – I

Q.2 If  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , then prove that -

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0.$$

यदि  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ , तो सिद्ध कीजिए—

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I_3 = 0$$

Q.3 Reduce the following matrix in the normal form and find its Rank -  
निम्न मैट्रिक्स को अभिलम्ब रूप में समाहित कर इसकी कोटि ज्ञात कीजिए—

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 9 & 12 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

### UNIT -II / इकाई - II

Q.4 Solve the equation  $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ , the sum of two of its roots being equal to zero.

यदि समीकरण  $x^3 - 3x^2 - 16x + 48 = 0$ , के दो मूलों का योग शून्य है, तो समीकरण हल कीजिए।

Q.5 Solve the equation  $x^3 - 15x - 126 = 0$ , by Cardon's method.

निम्न समीकरण को कार्डन विधि से हल कीजिए—

$$x^3 - 15x - 126 = 0$$

### UNIT -III / इकाई - III

Q.6 Prove that every infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

Q.7 If  $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ ,  $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  then prove that -

$$\rho_\sigma \rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$

यदि  $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ ,  $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$  तो सिद्ध कीजिए कि -

$$\rho_\sigma \rho^{-1} = (\rho(1)\ \rho(7)\ \rho(2)\ \rho(6)\ \rho(3)\ \rho(5)\ \rho(8)\ \rho(4))$$

### UNIT -IV / इकाई - IV

Q.8 A subgroup N of a group G is normal subgroup Iff -

$$gNg^{-1} = N, \forall g \in G$$

समूह G का एक उपसमूह N एक विशिष्ट उपसमूह होगा यदि और केवल यदि -

$$gNg^{-1} = N, \forall g \in G$$

Q.9 Find all the cosets of  $3Z$  in the additive group  $(Z, +)$  of integers.

समूह  $(Z, +)$  में  $3Z$  के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

**UNIT -V / इकाई - V**

Q.10 If  $f$  is a homomorphism from a group  $G$  to  $G'$  and  $e$  and  $e'$  be their respective identities, then show that -

(a)  $f(e) = e'$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G$

यदि  $f$  समूह  $G$  से  $G'$  पर एक समाकारिता हो तथा  $e$  और  $e'$  क्रमशः  $G$  और  $G'$  में तत्समक हों, तो प्रदर्शित कीजिए कि -

(a)  $f(e) = e'$

(b)  $f(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}, \forall a \in G$

Q.11 If  $f$  is a homomorphism of a group  $G$  to a group  $G'$  with kernel  $K$  then  $K$  is a subgroup of  $G$ .

यदि  $f$  समूह  $G$  में  $G'$  पर एक समाकारिता हो तो  $f$  का अष्टि समूह  $G'$  का उपसमूह होता है।

**PART - C / खण्ड- स**

**UNIT -I / इकाई - I**

Q.12 Apply matrix theory to solve the following system of equation-  
मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए-

$$x + y + z = 9$$

$$2x + 5y + 7z = 52$$

$$2x + y - z = 0$$

**UNIT -II / इकाई - II**

Q.13 Solve by Ferrari method -

फैरारी विधि से हल कीजिए-

$$x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 24x - 15 = 0$$

**UNIT -III / इकाई - III**

Q.14 The union of two sub group of a group  $G$  is subgroup iff one is contained in other.

किसी समूह  $G$  के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होगा यदि और केवल यदि एक दूसरे में अंतविष्ट हो।

**UNIT -IV / इकाई - IV**

Q.15 Prove that the kernel of a homomorphism  $f$  of a group  $G$  to a group  $G'$  is normal subgroup of  $G$ .

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह  $G$  से  $G'$  पर परिभाषित किसी समाकारिता  $f$  की अष्टि,  $G$  का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

**UNIT -V / इकाई - V**

Q.16 Every finite group is isomorphic to some permutation group.

प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारिक होता है।