

**1128**  
**I<sup>st</sup> YEAR ARTS EXAMINATION, 2019**  
**MATHEMATICS**  
**Paper – III**  
**GEOMETRY**

Time: Three Hours

Maximum Marks: 65

**PART – A (खण्ड – अ)**

[Marks: 20]

*Answer all questions (50 words each).*

*All questions carry equal marks.*

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – B (खण्ड – ब)**

[Marks: 25]

*Answer five questions (250 words each).*

*Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART – C (खण्ड – स)**

[Marks: 20]

*Answer any two questions (300 words each).*

*All questions carry equal marks.*

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

## **PART – A / खण्ड – अ**

Q.1 Answer the following-

निम्न के उत्तर दीजिए-

(i) Define an ellipse.

दीर्घवृत्त को परिभाषित कीजिए।

(ii) Find the eccentricity of the ellipse-

$$3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$$

दीर्घवृत्त  $3x^2 + 4y^2 - 12x - 8y + 4 = 0$  की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

(iii) Define a hyperbola.

अतिपरवलय को परिभाषित कीजिए।

(iv) Find the foci of the hyperbola-

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

अतिपरवलय  $9x^2 - 16y^2 = 144$  की नाभियाँ ज्ञात कीजिए।

(v) Define the image of a point on a plane.

समतल पर किसी बिन्दु के प्रतिबिम्ब को परिभाषित कीजिए।

(vi) Find the equation of straight line which passes through the point  $P(x_1, y_1, z_1)$  and  $Q(x_2, y_2, z_2)$ .

सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं  $P(x_1, y_1, z_1)$  तथा  $Q(x_2, y_2, z_2)$  से गुजरती है।

(vii) Give an example of sphere whose centre is  $(1, 0)$ .

एक गोले का उदाहरण दीजिए जिसका केन्द्र  $(1, 0)$  हो।

(viii) Define right circular cylinder.

लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए।

(ix) Define principal direction.

प्रमुख दिशा को परिभाषित कीजिए।

(x) Define tangent line.

स्पर्श रेखा को परिभाषित कीजिए।

## **PART – B / खण्ड – ब**

### **UNIT – I / इकाई – I**

Q.2 Find the locus of the points from where if tangents are drawn to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ; then its chord of contact subtend a right angle at the center of the ellipse.

उस बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जहाँ से यदि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  पर स्पर्श रेखायें खींची जाये तो स्पर्श जीवा दीर्घवृत्त के केन्द्र पर समकोण अन्तरित करें।

Q.3 Prove that the angle between the tangents to the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  and the circle  $x^2 + y^2 = ab$  at their points of intersection is  $\tan^{-1} \left[ \frac{a-b}{\sqrt{ab}} \right]$

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  तथा  $x^2 + y^2 = ab$  के प्रतिच्छेद बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाओं के मध्य कोण  $\tan^{-1} \left[ \frac{a-b}{\sqrt{ab}} \right]$  होता है।

## UNIT -II/ इकाई - II

Q.4 Prove that the locus of the foot of the perpendicular drawn from the center of the hyperbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  on any tangent to it is  $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ .

सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  के केन्द्र से इसकी किसी स्पर्श रेखा पर डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दुपथ  $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$  होता है।

Q.5 If two diameters are conjugate for a hyperbola, then prove that these are conjugate diameters for conjugate hyperbola also.

यदि दो व्यास एक अतिपरवलय के लिए संयुग्मी हों, तो सिद्ध कीजिए कि वे संयुग्मी अतिपरवलय के लिए भी संयुग्मी व्यास होंगे।

## UNIT -III/ इकाई - III

Q.6 Find the foot of perpendicular from the origin on the plane  $2x+3y-4z+1=0$ . Also find the image of the origin in the plane.

समतल  $2x+3y-4z+1=0$  पर मूलबिन्दु से डाले गये लम्ब के पाद ज्ञात कीजिए। साथ ही समतल में मूलबिन्दु का प्रतिबिम्ब भी ज्ञात कीजिए।

Q.7 Find the condition that the planes  $x = cy + bz$ ,  $y = az + cx$ ,  $z = bx + ay$  may intersect in a line, and show that the line of intersection is –

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}$$

समतलों  $x = cy + bz$ ,  $y = az + cx$ ,  $z = bx + ay$  के रेखा में प्रतिच्छेद कर सकने का प्रतिबंध ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि रेखा का प्रतिच्छेदन–

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}$$

## UNIT -IV/ इकाई - IV

Q.8 Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x - 2y + 2z = 3$ .

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशांक वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ,  $x - 2y + 2z = 3$  है।

Q.9 Prove that the cones given by the following equations are reciprocal to each other -

$$ax^2+by^2+cz^2=0 \quad \text{and} \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न समीकरण से व्यक्त होने वाले शंकु परस्पर व्युत्क्रम हैं –

$$ax^2+by^2+cz^2=0 \quad \text{तथा} \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 0$$

### UNIT -V/ इकाई - V

Q.10 Find the equation of two planes which contain the line  $7x+10y-3z=0$ ,  $5y-3z=0$  and touch the ellipsoid  $7x^2+5y^2+3z^2=60$ .

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $7x+10y-3z=0$ ,  $5y-3z=0$  से गुजरते हैं और दीर्घवृत्तज  $7x^2+5y^2+3z^2=60$  को स्पर्श करते हैं।

Q.11 Tangent planes are drawn from the point  $(\alpha, \beta, \gamma)$  to the ellipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Show that the perpendicular drawn from the origin on them generate the cone:

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

दीर्घवृत्तज  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  पर बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  से स्पर्श समतल खींचे गये हैं। प्रदर्शित कीजिए कि उन पर मूल बिन्दु से डाले गये लम्ब द्वारा निम्न शंकु बनता है -

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2$$

### PART - C / खण्ड - स

Q.12 Tangents are drawn from any point on the ellipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  to the circle  $x^2+y^2 = r^2$ ,  $r \leq b$ . Prove that the chord of contact touches the ellipse  $a^2x^2 + b^2y^2 = r^4$ .

दीर्घवृत्त  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  के किसी बिन्दु से वृत्त  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $r \leq b$  पर स्पर्श रेखायें खींची गयीं हैं। सिद्ध कीजिए की स्पर्श रेखाओं की स्पर्श जीवा दीर्घवृत्त  $a^2x^2 + b^2y^2 = r^4$  को स्पर्श करती है।

Q.13 Prove that the locus of the poles of the normal chords of rectangular hyperbola  $xy = c^2$  is the curve-  $(x^2 - y^2)^2 + 4c^2 xy = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि आयताकार परवलय  $xy = c^2$  की अभिलम्ब जीवाओं के ध्रुवों का बिन्दुपथ  $(x^2 - y^2)^2 + 4c^2 xy = 0$  है।

Q.14 Two spheres of radii  $r_1$  and  $r_2$  cut orthogonally, prove that the radius of their common circle is  $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$ .

$r_1$  तथा  $r_2$  त्रिज्या के दो गोले लाम्बिक रूप से कटते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या  $\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$  है।

Q.15 Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to the paraboloid  $ax^2 + by^2 = 2cz$ .

परवलय  $ax^2 + by^2 = 2cz$  पर तीन परस्पर लम्बवत् स्पर्श तलों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।

Q.16 Find the shortest distance between the lines -

$$3x - 9y + 5z = 0 = x + y + z$$

$$\text{and } 6x + 8y + 3z - 13 = 0 = x + 2y + z - 3$$

निम्न रेखाओं के बीच लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए -

$$3x - 9y + 5z = 0 = x + y + z$$

$$\text{तथा } 6x + 8y + 3z - 13 = 0 = x + 2y + z - 3$$