

1126
Ist YEAR ARTS EXAMINATION, 2019
MATHEMATICS
Paper – I
ALGEBRA

Time: Three Hours

Maximum Marks: 70

PART – A (खण्ड – अ)

[Marks: 20]

Answer all questions (50 words each).

All questions carry equal marks.

सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – B (खण्ड – ब)

[Marks: 30]

Answer five questions (250 words each).

Selecting one from each unit. All questions carry equal marks.

प्रत्येक इकाई से एक-एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 250 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – C (खण्ड – स)

[Marks: 20]

Answer any two questions (300 words each).

All questions carry equal marks.

कोई दो प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

PART – A / खण्ड – अ

Q.1 Answer the following –

निम्न के उत्तर दीजिए –

- (i) State Cayley – Hamilton theorem.
कैली हैमिल्टन प्रमेय का प्राक्कथन लिखिये।
- (ii) If A be any square matrix, then show that $A + A^T$ is symmetric matrix.
यदि A कोई वर्ग मैट्रिक्स हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A + A^T$ सममित मैट्रिक्स होती है।
- (iii) Show that the equation $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ has atleast two imaginary roots.
सिद्ध कीजिए कि समीकरण $x^4 - 2x^3 - 1 = 0$ के कम से कम दो मूल काल्पनिक हैं।
- (iv) Define Roots of an Equation.
समीकरण के मूल को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Even and Odd Permutation Group.
सम तथा विषम क्रमचय समूह को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Write the definition of Monoid.
मोनोइड की परिभाषा लिखिये।
- (vii) Define Normal subgroup.
प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिये।
- (viii) State Lagrange's theorem.
लेग्रान्ज प्रमेय का प्राक्कथन लिखिए।
- (ix) Define Isomorphic Groups.
तुल्याकारी समूह को परिभाषित कीजिए।
- (x) State the fundamental theorem on Morphism.
समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का प्राक्कथन लिखिए।

PART – B / खण्ड – ब

UNIT – I / इकाई – I

Q.2 For what value of k, the following system of equations has non-trivial solution.

k के किस मान के लिए समीकरण निकाय के सार्थक हल हैं?

$$2x + 3y + 4z = 0; \quad x + y + z = 0; \quad 4x + 6y + kz = 0$$

Q.3 Find the Eigen values and Eigen vectors of the Matrix A:

मैट्रिक्स A के अभिलाक्षणिक मूलों एवं सदिशों को ज्ञात कीजिये।

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

UNIT – II / इकाई – II

Q.4 Solve the following reciprocal equation:

निम्न व्युत्क्रम समीकरण हल कीजिए:

$$x^4 - 10x^3 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$$

Q.5 Solve by Ferrari's Method.

फैरारी विधि द्वारा हल कीजिए।

$$x^4 - 12x - 5 = 0$$

UNIT -III/ इकाई - III

Q.6 Show that the set $\{1, -1, i, -i\}$ where $i = \sqrt{-1}$ is an abelian group for Multiplication.

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $\{1, -1, i, -i\}$ जहाँ $i = \sqrt{-1}$ गुणन संक्रिया के लिए एक आबेली ग्रुप है।

Q.7 If $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

$\sigma = (1 \ 3 \ 4) (5 \ 6) (2 \ 7 \ 8 \ 9)$, then find $\sigma^{-1}\rho\sigma$ and by expressing the permutation ρ as the product of disjoint cycles, find whether δ is an even permutation or odd permutation. Also find its order.

यदि $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ और $\sigma = (1 \ 3 \ 4) (5 \ 6) (2 \ 7 \ 8 \ 9)$

है, तो $\sigma^{-1}\rho\sigma$ ज्ञात कीजिये तथा क्रमचय ρ को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइये कि ρ सम क्रमचय है या विषम क्रमचय? इसकी कोटि भी ज्ञात कीजिये।

UNIT -IV/ इकाई - IV

Q.8 Prove that the Intersection of any two normal subgroups of a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी ग्रुप के किन्हीं दो प्रसामान्य उपग्रुप का सर्वनिष्ठ उस ग्रुप का एक प्रसामान्य उपग्रुप होता है।

Q.9 Find the quotient group G/H and also prepare its operation table, when $G = (z, +)$, $H = (4z, +)$.

विभाग ग्रुप G/H ज्ञात कीजिए एवं इसकी संक्रिया सारणी भी बनाइये जबकि $G = (z, +)$, $H = (4z, +)$.

UNIT -V/ इकाई - V

Q.10 Prove that a homomorphism f defined from a group G to a group G' is a monomorphism if $\ker f = \{e\}$, where e is the identity of G .

किसी ग्रुप G से समूह G' पर परिभाषित समाकारिता f , एकैक समाकारिता होती है यदि और केवल यदि f , की अष्टि $= \{e\}$, जहाँ e , G में तत्समक है।

Q.11 If f is a homomorphism of a group G to a group G' , then show that H is a subgroup of $G \Rightarrow f(H)$ is a subgroup of G' .

यदि f ग्रुप G से G' पर एक समाकारिता हो, तो सिद्ध कीजिये कि H , G का उपग्रुप है $\Rightarrow f(H)$, G' का उपग्रुप है।

PART – C / खण्ड – स

Q.12 For what value of λ and μ , the following in system of Equations have:

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

- (i) Unique solution
- (ii) Infinite solution
- (iii) No solution

λ तथा μ के किन मानों के लिए समीकरण निकाय –

$$x + y + z = 6$$

$$x + 2y + 3z = 10$$

$$x + 2y + \lambda z = \mu \text{ के}$$

- (i) अद्वितीय हल
- (ii) अनन्त हल
- (iii) हल नहीं होंगे

Q.13 Solve by Cardaon's Method-

कार्डन विधि से हल कीजिए :-

$$x^3 - 15x - 126 = 0$$

Q.14 Show that, the set Q^+ of the positive rational numbers forms an abelian group for the operation '*' defined as-

$$a * b = \frac{ab}{2} \quad \forall a, b \in Q^+$$

सिद्ध कीजिये कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया * के लिए एक क्रमविनिमेय गुप है, जहाँ * निम्न प्रकार परिभाषित है:

$$a * b = \frac{ab}{2} \quad \forall a, b \in Q^+$$

Q.15 If H is a subgroup of a group G and $g \in G$, then prove that:

(a) $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$, is a subgroup of G

(b) If H is finite, then $o(H) = o(gHg^{-1})$

यदि H किसी गुप G का एक उपगुप हो तथा $g \in G$, तो सिद्ध कीजिये कि:

(a) $gHg^{-1} = \{ghg^{-1} | h \in H\}$, G का एक उपगुप है

(b) यदि H परिमित हो, तो $o(H) = o(gHg^{-1})$

Q.16 State and Prove Cayley theorem.

कैली प्रमेय को प्राक्कथन सहित सिद्ध कीजिए।
