

# MAT5071T

**B.Sc. FIRST SEMESTER (NEP) EXAMINATION, 2023-24**

## MATHEMATICS

### Calculus

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 80

**PART-A/ भाग-अ**

[Marks :16]

Answer all **eight** questions (Maximum **50** words each).

*All questions carry equal marks.*

सभी आठ प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक न हो।  
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART-B/ भाग-ब**

[Marks :40]

Answer **five** questions (Maximum **250** words each),  
selecting one from each unit. *All questions carry equal marks.*

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर  
250 शब्दों से अधिक न हो। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART-C/ भाग-स**

[Marks :24]

Answer **any two** questions (Maximum **300** words each).

*All questions carry equal marks.*

किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 300 शब्दों से अधिक न हो।  
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

**PART-A/ भाग-अ**

1. (i) Find the asymptotes parallel to the axes to the curve  $\frac{a^3}{x^3} - \frac{b^3}{y^3} = 1$ . [2]

वक्र  $\frac{a^3}{x^3} - \frac{b^3}{y^3} = 1$  की अक्षों के समान्तर अनन्तस्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए।

- (ii) Find the radius of curvature at the point  $(1, \sqrt{2})$  on the curve  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ . [2]

वक्र  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  के बिन्दु  $(1, \sqrt{2})$  पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- (iii) Evaluate  $\int (-9/2)$ . [2]

$\int (-9/2)$  का मान ज्ञात कीजिए।

- (iv) Define the length of arc of an evolute. [2]

केन्द्रज के चाप की लम्बाई को परिभाषित कीजिए।

- (v) Define order and degree of a differential equation. [2]

अवकल समीकरण की कोटि तथा घात को परिभाषित कीजिए।

- (vi) Find the integrating factor of the DE : [2]

$$(x^3 e^x - my^2) dx + mxy dy = 0$$

अवकल समीकरण  $(x^3 e^x - my^2) dx + mxy dy = 0$  का समाकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

- (vii) Solve  $y \sin 2x dx = (1 + y^2 + \cos^2 x) dy$ . [2]

हल कीजिए  $y \sin 2x dx = (1 + y^2 + \cos^2 x) dy$ .

(viii) Write down the geometrical interpretation of Rolle's theorem. [2]

रोल प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ लिखिए।

**PART-B/ भाग-ब**

**Unit-I /इकाई-I**

2. Using Lagrange's MV Theorem ; prove that ( $x > 0$ ) :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x. [8]$$

लाग्रांज मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए ( $x > 0$ ) :

$$\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x.$$

**OR / अथवा**

Find the radius of Curvature at the point ( $r, \theta$ ) on the curve :  $u^2 = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}$ . [8]

निम्न ध्रुवी वक्र के बिन्दु ( $r, \theta$ ) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए :  $u^2 = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}$ .

**Unit-II /इकाई-II**

3. Prove that  $\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m); m \in \mathbb{Z}$ . [8]

सिद्ध कीजिए  $\Gamma(m)\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\Gamma(2m); m \in \mathbb{Z}$ .

**OR / अथवा**

Find the area common to the following circles

$$r = a\sqrt{2} \quad \text{and} \quad r = 2a \cos \theta. \quad [8]$$

निम्न वृत्तों का उभयनिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए

$$r = a\sqrt{2} \quad \text{तथा} \quad r = 2a \cos \theta.$$

**Unit-III /इकाई-III**

4. Solve  $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$  [8]

हल कीजिए  $x \frac{dy}{dx} + y = y^2 \log x.$

**OR / अथवा**

Solve  $(x - y - 2)dx = (2x - 2y - 3)dy.$  [8]

हल कीजिए  $(x - y - 2)dx = (2x - 2y - 3)dy.$

**Unit-IV /इकाई-IV**

5. Prove that  $\int_0^{\infty} \cos(ax^{1/n}) dx = \frac{[(n+1) \cos \frac{n\pi}{2}]}{a^n}.$  [8]

सिद्ध कीजिए  $\int_0^{\infty} \cos(ax^{1/n}) dx = \frac{[(n+1) \cos \frac{n\pi}{2}]}{a^n}.$

**OR / अथवा**

Prove that the cardioid  $r = a(1 + \cos \theta)$  is divided by the line  $4r \cos \theta = 3a$  into two parts such that the lengths of the arcs on either side of this line are equal. [8]

सिद्ध कीजिए कि रेखा  $4r \cos \theta = 3a$  कार्डियोइड  $r = a(1 + \cos \theta)$  को दो भागों में इस प्रकार विभाजित करती है कि इस रेखा के प्रत्येक ओर के चापों की लम्बाइयाँ बराबर हैं।

### Unit-V / इकाई-V

6. Find the pedal equation for the following curve : [8]

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

निम्न वक्र के लिए पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

### OR / अथवा

Prove that the points of inflexion of the curve  $y^2 = (x-a)^2(x-b)$  lie on the line  $3x+a=4b$ . [8]

सिद्ध कीजिए कि वक्र  $y^2 = (x-a)^2(x-b)$  के नति परिवर्तन बिन्दु वक्र  $3x+a=4b$  पर स्थित हैं।

### PART-C / भाग-स

7. State and prove the Rolle's theorem. [12]

रोल प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

8. Prove that the area enclosed by the Folium  $x^3 + y^3 = 3axy$  and its asymptote is equal to  $\frac{3a^2}{2}$ . [12]

सिद्ध कीजिए कि फोलियम  $x^3 + y^3 = 3axy$  तथा इसके अनन्तस्पर्शी के मध्य घिरा क्षेत्रफल  $\frac{3a^2}{2}$  के बराबर होता है।

9. Solve  $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ . [12]

हल कीजिए  $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$ .

10. Find the equation of the quartic curve which has  $x = 0, y = 0, y = x, y = -x$  for asymptotes, which passes through the points  $(a, b)$  and which cuts its asymptotes again in eight points lying upon the circle  $x^2 + y^2 = a^2$ . [12]

उस चतुर्घाती वक्र की समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके अनन्तस्पर्शी  $x = 0, y = 0, y = x, y = -x$  हैं तथा जो बिन्दु  $(a, b)$  से गुजरता है और अनन्तस्पर्शी को पुनः आठ बिन्दुओं पर काटता है जो वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  पर स्थित है।

----- × -----