

2635**B. Sc./B. Ed. (Integrated) Second Year Examination, 2019****MATHEMATICS – II****(Real Analysis)****Time: Three Hours****Maximum Marks: 55****Instructions –**

Attempt **five** questions in all, selecting at least **one** question from each unit. The answer of essay type questions should not be more than **400** words and short answer type of questions in not more than **150** words. All questions carry equal marks.

निर्देश –

प्रत्येक इकाई में से कम-से-कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। निबन्धात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **400** शब्दों में और लघुत्तरात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **150** शब्दों में लिखिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT – I/ इकाई – IQ.1 (i) If p and q are rational and irrational numbers respectively then prove that(i) $p + q$ and (ii) pq ($p \neq 0$) are rational numbers.यदि p तथा q क्रमशः परिमेय तथा अपरिमेय संख्या हों, तो सिद्ध कीजिए कि—(i) $p + q$ तथा (ii) pq ($p \neq 0$) अपरिमेय संख्याएं हैं।

(ii) Prove that an ordered field is infinite field.

सिद्ध कीजिए कि क्रमित क्षेत्र अनन्त क्षेत्र है।

OR/ अथवा

Discuss the nature of discontinuity of the following function at $x = 1$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$$

Show that $f(0)$ and $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ differ in sign

निम्न फलन का $x = 1$ पर असंतता का विवेचन कीजिए

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2+x) - x^{2n} \sin x}{1+x^{2n}}$$

प्रदर्शित कीजिए कि $f(0)$ एवं $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ के चिन्ह भिन्न भिन्न हैं।

UNIT - II / इकाई - II

- Q.2 (i) Test the continuity and differentiability of the following function in $(1, 4)$
निम्न फलन की अन्तराल $(1, 4)$ पर सांतत्यता एवं अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

$$f(x) = |x - 2| + 2|x - 3|$$

- (ii) Test the differentiability of the following functions at $x = 0$
बिन्दु $x = 0$ पर निम्न फलन के लिए अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & ; \text{ यदि } x \neq 0 \\ 0 & ; \text{ यदि } x = 0 \end{cases}$$

OR / अथवा

Show that the function -

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \frac{1}{3} \sin \log x^2\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ is continuous everywhere but differential coefficient}$$

does not exist at $x = 0$

प्रदर्शित कीजिए कि फलन -

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \frac{1}{3} \sin \log x^2\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ सर्वत्र संतत है परन्तु } x = 0 \text{ पर अवकलज गुणांक विद्यमान}$$

नहीं है।

UNIT – III/ इकाई – III

Q.3 (i) Let f is a function defined on the interval $[0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

then show that f is not R-integrable on interval $[0, 1]$

यदि फलन f अन्तराल $[0, 1]$ पर निम्न प्रकार से परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ 1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिए कि f , संवृत अन्तराल $[0, 1]$ पर रीमान समाकलनीय नहीं है।

(ii) If $f(x) = x \in [0, 1]$, then show that f is R-integrable on interval $[0, 1]$ and that

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

यदि $f(x) = x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय है तथा,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

OR/ अथवा

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{when } x \text{ is rational number} \\ x^2 + x^3, & \text{when } x \text{ is irrational number} \end{cases}$$

Find the upper and lower R-Integrals of a function f in $[0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2, & \text{जबकि } x \text{ परिमेय संख्या है} \\ x^2 + x^3, & \text{जबकि } x \text{ अपरिमेय संख्या है} \end{cases}$$

अन्तराल $[0, 2]$ में फलन f के निम्न और ऊपरी R-समाकलन ज्ञात कीजिए।

UNIT – IV/ इकाई – IV

Q.4 (i) A sequence $\{x_n\}$ is defined by $x_n = \frac{n^2+1}{2n^2+5}$, then find m such that $\lim x_n = \frac{1}{2}$

एक अनुक्रम $\{x_n\}$, जहाँ $x_n = \frac{n^2+1}{2n^2+5}$ से परिभाषित हो, m प्राप्त कीजिए ताकि $\lim x_n = \frac{1}{2}$

(ii) Prove that the sequence $\{x_n\}$ where

$$x_n = \frac{2n-7}{3n+2} \forall n \in \mathbb{N}$$

- (i) Is monotonically increasing
 - (ii) Is bounded
 - (iii) Is convergent
- सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$ जहाँ

$$x_n = \frac{2n-7}{3n+2} \forall n \in \mathbb{N}$$

- (i) एकदिष्ट वर्धमान है
- (ii) परिबद्ध है
- (iii) अभिसारी है

OR/ अथवा

If $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ be two convergent sequences which converge to ζ and η respectively then

यदि $\{x_n\}$ एवं $\{y_n\}$ दो अभिसारी अनुक्रम हैं, जो क्रमशः ζ एवं η को अभिसृत होती हैं, तो

- (i) $\lim \{x_n + y_n\} = \zeta + \eta$
- (ii) $\lim \{x_n - y_n\} = \zeta - \eta$
- (iii) $\lim \{x_n y_n\} = \zeta \eta$
- (iv) $\lim \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} = \frac{\zeta}{\eta}, \eta \neq 0$

UNIT – V / इकाई – V

Q.5 (i) Test the uniform convergence of the following :

निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए—

$$\left\{ \frac{nx}{1+n^2x^2} \right\}, 0 \leq x \leq 1$$

- (ii) Discuss the uniform convergence of the series in the interval $[0, 1]$
 $[0, 1]$ अन्तराल में निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसारी का विवेचन कीजिए।

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x)$$

OR/ अथवा

Test the convergence of the following integrals -

निम्न समाकलों के अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

- (i) $\int_a^{\infty} \frac{x^{2/3}}{b^2x^2+c^2} dx$
- (ii) $\int_0^{\infty} \frac{xdx}{(1+x)^3}$
- (iii) $\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx$