Roll No. ..... Total Pages: 07

1635

B.Sc. /B.Ed. (FIRST YEAR) EXAMINATION, 2018

MATHEMATICS

(Vector Geometry and Linear Algebra)

Time: Three Hours

Maximum Marks: 60

Instructions:

*Attempt **five** questions in all, selecting at least **one** question from each Unit. The answer of essay type questions should not be more than **400** words and short answer type of questions in not more than **150** words. All questions carry equal marks.*

निर्देश :

*प्रत्येक इकाई में से कम–से–कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिये। निबन्धात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **400** शब्दों में और लघुत्तरात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **150** शब्दों में लिखिये। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

UNIT – I इकाई – I

Q.1 (a) Find the equations of the tangent plane and the normal to the surface xyz = 4 at the point (1, 2, 2). **[6]**

पृष्ठ xyz = 4 के बिन्दू (1, 2, 2) पर स्पर्श तल एवं अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

(b) If r is a vector function of a scalar t, r is its modulus and a and b are constant vectors, differentiate the following with respect to t- **[6]**

$$f(t) = \frac{r + a}{r^2 + a^2}$$

यदि r अदिश चर t का एक सदिश फलन है, जिसका परिमाण r है तथा a और b कोई अचर सदिश हैं। तो निम्न का t के सापेक्ष अवकलन कीजिए–

$$f(t) = \frac{r + a}{r^2 + a^2}$$

OR अथवा

Q.1 (a) If $(x\,y\,z)^b \left(x^a i + y^a j + z^a k\right)$ is an irrotational vector, then prove that either b = 0 or a = -1. **[6]**

यदि $(x\,y\,z)^b \left(x^a i + y^a j + z^a k\right)$ एक अघूर्णीय सदिश है तो सिद्ध कीजिए कि या तो b = 0 या a = -1 है।

(b) If r = xi + yj + zk and r = | r |; prove that- **[6]**

$$\text{div } r^n r = (n+3) r^n$$

Hence show that $r^n r$ will be solenoidal if n = -3

यदि r = xi + yj + zk तथा r = | r |; सिद्ध कीजिए–

$$\text{div } r^n r = (n+3) r^n$$

फलतः प्रदर्शित कीजिए कि $r^n r$ परिनालिकीय होगा यदि n = -3

UNIT – II इकाई – II

Q.2 (a) State and prove Gauss's divergence theorem. **[6]**

गॉस के अपसरण प्रमेय के कथन को लिखते हुए सिद्ध कीजिए।

(b) Evaluate- **[6]**

$$\int_C F.dr \text{ ; where } F = zi + xj + yk$$

C is the arc of the curve $r = \cos t\, i + \sin t\, j + t\, k$ from $t = 0$ to $t = 2\pi$

मान ज्ञात कीजिए–

$$\int_C F.dr \text{ ; जहां } F = zi + xj + yk$$

C, वक्र $r = \cos t\, i + \sin t\, j + t\, k$ का $t = 0$ से $t = 2\pi$ तक का चाप है।

OR अथवा

Q.2 (a) Evaluate by Green's theorem- **[6]**

$$\int_C \left(e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy\right)$$

Where C is the rectangle with vertices $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, \pi/2)$ and $(0, \pi/2)$

ग्रीन प्रमेय से मान ज्ञात कीजिए–

$$\int_C \left(e^{-x} \sin y\, dx + e^{-x} \cos y\, dy\right)$$

जहाँ C एक आयत है, जिसके शीर्ष हैं $(\pi, 0)$, $(0, 0)$, $(\pi, \pi/2)$ and $(0, \pi/2)$

(b) If $r(t) = 2i - j + 2k$, when $t = 2$ **[6]**

$= 4i - 2j + 3k$, when $t = 3$

Show that : $\int_2^3 \left(r . \frac{dr}{dt} \right) dt = 10$

यदि $r(t) = 2i - j + 2k$, जब $t = 2$

$= 4i - 2j + 3k$, जब $t = 3$

सिद्ध कीजिए– $\int_2^3 \left(r . \frac{dr}{dt} \right) dt = 10$

UNIT – III इकाई – III

Q.3 (a) Find the asymptotes of the following hyperbola and equations to their conjugate hyperbola. **[6]**

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

निम्न अतिपरवलय की अनन्त स्पर्शिया ज्ञात कीजिए तथा संयुग्मी अतिपरवलय के समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

$$y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0$$

(b) Find the equations to the Sphere that passes through the circle **[6]**

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0, 3x - 4y + 5z - 15 = 0$

and cuts orthogonally the sphere,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$

निम्न वृत्त से गुजरने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिएः

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 3y - 4z + 6 = 0, 3x - 4y + 5z - 15 = 0$

जो कि निम्न गोले को लाम्बिक रूप से काटता है–

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z + 11 = 0$

OR अथवा

Q.3 (a) Show that the lines drawn through the point (α, β, γ) whose direction ratios satisfy the relation $a\ell^2 + bm^2 + cn^2 = 0$, generate the cone

$a(x - \alpha)^2 + b(y - \beta)^2 + c(z - \gamma)^2 = 0$ **[6]**

सिद्ध कीजिए की (α, β, γ) से गुजरने वाली रेखाएँ जिनके दिक् अनुपात

$a\ell^2 + bm^2 + cn^2 = 0$ को संतुष्ट करते हैं, निम्न शंकु जनित करती है–

$a(x - \alpha)^2 + b(y - \beta)^2 + c(z - \gamma)^2 = 0$

(b) Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle passes through the points (1, 0, 0), (0, 1, 0) and (0, 0, 1). Also find the equation of its axis. **[6]**

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त बिन्दुओं (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) से गुजरता है। तथा उसकी अक्ष का भी समीकरण ज्ञात कीजिए।

UNIT – IV इकाई – IV

Q.4 (a) Find the inverse of the matrix by using Gauss - Jordan method- **[6]**

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

गॉस –जोर्डन विधि द्वारा निम्न मेट्रिक्स का व्यूत्क्रम मेट्रिक्स ज्ञात कीजिए–

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Using matrices, solve the following system of equations- **[6]**

$$3x + 4y + 7z = 8$$

$$2x + 2y + z = 4$$

$$x + 3y + z = 6$$

मैट्रिक्स से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए–

$$3x + 4y + 7z = 8$$

$$2x + 2y + z = 4$$

$$x + 3y + z = 6$$

OR अथवा

Q.4 (a) Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space v (F) is a subspace if either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$. **[6]**

किसी सदिश समष्टि v (F) की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि केवल $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$

(b) Show that the set $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b\, c \in R\}$ is a subspace of the vector space R(R) **[6]**

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \mid a, b, c \in R\}$ सदिश समष्टि R(R) की एक उपसमष्टि है।

UNIT – V इकाई – V

Q.5 "State and prove Extension theorem". **[12]**

"विस्तार प्रमेय के कथन को लिखते हुए सिद्ध कीजिए"।

OR अथवा

Q.5 (a) Find the Eigen values and their corresponding Eigen vectors of the following matrix- **[6]**

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स के अभिलक्षणिक मूल तथा उनके संगत अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिए–

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Prove that the Kernal of a linear transformation is a subspace. **[6]**

सिद्ध कीजिए किसी रैखिक प्रतिचित्रण की अष्टि एक उपसमष्टि होती है।