Roll No. ..... Total Pages: 04

1634

B. Sc./B. Ed. (First Year) Examination, 2019

MATHEMATICS - I

(Calculus)

Time: Three Hours

Maximum Marks: 60

Instructions –

Attempt **five** questions in all, selecting at least **one** question from each unit. The answer of essay type questions should not be more than **400** words and short answer type of questions in not more than **150** words. All questions carry equal marks.

निर्देश –

प्रत्येक इकाई में से कम–से–कम **एक** प्रश्न का चयन करते हुए, कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। निबन्धात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **400** शब्दों में और लघुत्तरात्मक प्रश्न का उत्तर अधिकतम **150** शब्दों में लिखिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

UNIT – I / इकाई – I

Q.1 (a) Find the equation of Tangent and Normal at the point where curve $y = b\, e^{-x/a}$ cuts y – axis. [6]

वक्र $y = b\, e^{-x/a}$ के उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा एवं अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ वक्र y – अक्ष को काटता है।

(b) For the curve $y^2 = c^2 + s^2$, prove that – [6]

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

वक्र $y^2 = c^2 + s^2$ के लिए सिद्ध कीजिए –

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2 - c^2}}{c}$$

OR / अथवा

Q.1 Show that the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is - [12]

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}$$

सिद्ध कीजिए दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का पदिक समीकरण है –

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}$$

UNIT – II / इकाई – II

Q.2 (a) If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$, then prove that - [6]

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^3 + y^3}{x - y}\right)$,तो सिद्ध कीजिए –

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$$

(b) Find the points where the function $x^3 + y^3 - 3axy$ has maximum or minimum value. [6]

उन बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ फलन $x^3 + y^3 - 3axy$ का मान उच्चतम या न्यूनतम है।

OR / अथवा

Q.2 Transfer the following equation in polar co-ordinates - [12]

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

निम्न समीकरण का ध्रुवीय निर्देशांकों में रूपान्तर कीजिए –

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

UNIT – III / इकाई – III

Q.3 (a) Show that the asymptotes of the following cubic, cut the curve again in three points which lie on the straight line $x - y + 1 = 0$: [6]

$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$

सिद्ध कीजिए कि निम्न त्रिपद वक्र के अनन्त स्पर्शी वक्र को तीन बार काटते हैं तथा रेखा $x - y + 1 = 0$ पर स्थित है –

$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$

(b) Trace the following cissoids - [6]

$y^2 (2a - x) = x^3$

निम्न सिसायड का अनुरेखण कीजिए –

$y^2 (2a - x) = x^3$

OR / अथवा

Q.3 Find the evolute of the following curve - [12]

$x = a \cos t + a \log \tan\left(\frac{t}{2}\right), y = a \sin t$

निम्न वक्र का केन्द्रज ज्ञात कीजिए –

$x = a \cos t + a \log \tan\left(\frac{t}{2}\right), y = a \sin t$

UNIT – IV / इकाई – IV

Q.4 (a) Integrate r sin θ over the area of the Cardioid r = a(1 + cosθ) about the initial line. [6]

हृद्याभ r = a(1 + cos θ) के आरम्भिक रेखा से ऊपर वाले क्षेत्र पर r sin θ का समाकलन कीजिए।

(b) Change the order of integration in following double integral - [6]

$$\int_0^{a\cos\alpha} \int_{x\tan\alpha}^{\sqrt{(a^2-x^2)}} f(x, y)\, dx\, dy$$

निम्न द्वि समाकलन में समाकलन का क्रम बदलिए –

$$\int_0^{a\cos\alpha} \int_{x\tan\alpha}^{\sqrt{(a^2-x^2)}} f(x, y)\, dx\, dy$$

OR / अथवा

Q.4 Find the volume of the ellipsoid in the first positive octant - [12]

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

निम्न दीर्घवृत्तज का प्रथम धनात्मक अष्टांशक में आयतन ज्ञात कीजिए –

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

UNIT – V / इकाई – V

Q.5 (a) Find the area enclosed by the cardioid r = a(1+ cos θ). [6]

हृद्याभ r = a(1+ cosθ) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that the whole length of the following curve is $\pi\, a\sqrt{2}$ - [6]

$x^2 (a^2 – x^2) = 8a^2 y^2$

सिद्ध कीजिए की निम्न वक्र की कुल लम्बाई $\pi\, a\sqrt{2}$ है –

$x^2 (a^2 – x^2) = 8a^2 y^2$

OR / अथवा

Q.5 Prove the volume of the solid generated by revolving the curve $y = a^3/(a^2+x^2)$ about the asymptote is $\frac{\pi^2 a^3}{2}$ [12]

सिद्ध कीजिए कि वक्र $y= a^3/(a^2+x^2)$ द्वारा अपने अनन्तः स्पर्शी के परितः परिक्रमण से जनित घनाकृति का आयतन $\frac{\pi^2 a^3}{2}$ होगा।